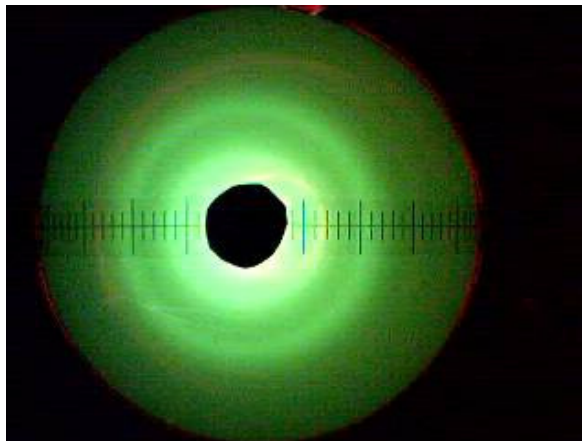


Aufgabensammlung

zum

RCL "Elektronenbeugung"



Didaktische Tips zur Aufgabensammlung

Die Aufgabensammlung ist in die drei Bereiche Grundwissen, Versuchsaufbau und Experiment geteilt. In jedem Bereich sind nach Themen strukturierte, meist aus mehreren Teilaufgaben bestehende Aufgaben zu finden. Zur Nutzung der Aufgaben bitte die folgenden Hinweise und Tips beachten:

- Die strukturierte Darstellung schließt nicht aus, einzelne Aufgaben herauszugreifen oder mehrere Aufgaben unter einem neuen Gesichtspunkt zusammenzustellen.
- Einige der Aufgaben sind stark von Vorwissen der Schüler bzw. von im Unterricht oft eher am Rande behandelten Themen abhängig (z. B. I/2b, II/2b, II/3b oder I-II/3c).
- Die Aufgaben erhalten einen didaktischen Mehrwert, wenn sie in Verbindung mit kognitiven Werkzeugen eingesetzt werden: Mit Excel oder einem CAS lassen sich Messwerte graphisch darstellen (z. B. III/1c) oder funktionale Zusammenhänge veranschaulichen und dynamisieren (z. B. I/1b, III/3b und III/3c).
- Mit dem Informationsmedium Internet können Schüler lernen Informationen zu suchen, zu finden, zu extrahieren und zu strukturieren (z. B. II/2c, II/2d und II/3a). Hier empfiehlt es sich Kleingruppen zu bilden, wovon jede gezielt einer einzigen Frage nachgeht. Eine strukturierte Vorgehensweise wie z. B. interessante Seiten in den Favoriten zu sammeln, Material zu sichten, Informationen zu extrahieren, zu besprechen und einen eigenen Antworttext zu formulieren sollte beachtet werden.
- Tips zu Aufgabe I/2b: Den Begriff Elementarzelle an einem einfacheren Kristall wie z. B. NaCl eingeführen. Beispielhaft sollte daran auch die Bestimmung der Geometrie unter dem Leitgedanken einer makroskopischen und mikroskopischen Dichtebestimmung durchgeführt werden. Zum Lösen der Aufgabe sollte dann ein Kristallgittermodell von Graphit zur Verfügung stehen (z. B. von Conatex zu beziehen oder aus der Physik/Chemiesammlung)
- Hinweis zu Aufgabe III/3b: Bei der Elektronenbeugungsröhre von Leybold beträgt der Kugelkalottenradius ca. 5,5 cm, die kugelförmige Elektronenbeugungsröhre von Phywe hat einen Radius von ca. 6,4 cm.
- Tips zu Aufgabe III/3b: Je nach Kursfähigkeiten die Schüler im Plenum oder in Gruppen Skizze zum Problem erstellen lassen, relevante Größen erkennen und eintragen, funktionale Zusammenhänge zwischen Größen zusammen stellen (Inhalte aus der Klasse 10), Rechenziel überlegen (welche Größen sind gegeben, welche gesucht), Rechnungen durchführen und Ergebnisse graphisch darstellen.

Aufgaben

I. Grundwissen

1. Elektronen als Materiewellen

- a) Inwiefern lässt sich aus dem RCL "Elektronenbeugung" schließen, dass sich Elektronen wie Materiewellen verhalten?

Schreibe einen Text mit Zeichnungen zur qualitativen Erklärung der Entstehung der Fluoreszenzringe.

Mit welchen weiteren Versuchen ließe sich die Hypothese der Materiewellen erhärten?

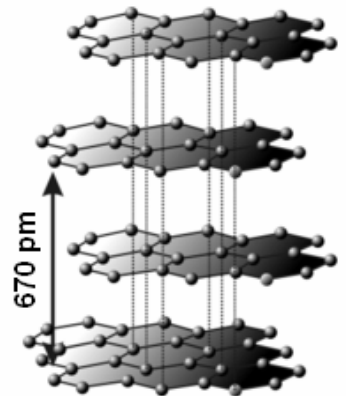
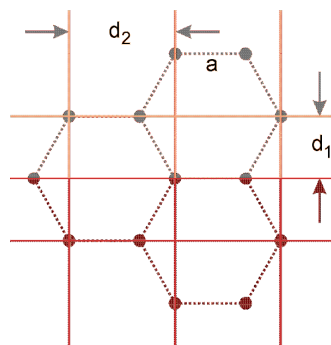
- b) Leite für $v \ll c$ (nichtrelativistische Elektronen) die Zusammenhänge $v(U)$ und $\lambda(U)$ her (Beschleunigungsspannung U , Geschwindigkeit v der Elektronen mit Masse m und Ladung e).

Stelle beide Abhängigkeiten für $0 < U < 5 \text{ kV}$ in einem Diagramm graphisch dar: Handelt es sich um relativistische Elektronen? Bis zu welchem Wellenlängenbereich elektromagnetischer Strahlung reichen die Wellenlängen? Inwiefern ist das für den Versuch von Bedeutung?

2. Gitterstruktur von Graphit

- a) Berechne die Netzebenenabstände d_1 und d_2 für $a = 142 \text{ pm}$.

- b) Beschreibe die Gitterstruktur von Graphit. Berechne den Abstand a für $M = 12 \text{ g/mol}$ und $\rho = 2,25 \text{ g/cm}^3$.



3. Beugung von Materiewellen an Kristallen

- a) Leite die Braggsche Gleichung in mit Text begründeten Schritten her.
- b) Ermittle eine Formel zur Berechnung des Netzebenenabstands d für kleine Beugungswinkel aus den Messwerten von Radius r_n des Beugungskreises n -ter Ordnung, Beschleunigungsspannung U und dem Abstand L zwischen Gitter und Fluoreszenzschirm.

- c) Begründe durch halbquantitative Überlegungen wie sich der Radius r der Beugungsringe bei Erhöhung der Beschleunigungsspannung U verändert.

Welche größte Ordnung lässt sich auf einem Fluoreszenzschirm mit dem Radius $R_{\text{max}} = 4,5 \text{ cm}$ (Elektronenbeugungsröhre von Leybold) bei der Elektronenbeugung an Graphit für $U = 4 \text{ kV}$ und $L = 13,5 \text{ cm}$ theoretisch beobachten?

- d) Bestimme die kleinstmögliche Beschleunigungsspannung ab der theoretisch Beugungsringe zu erwarten sind (Tip: Bedingung unter der überhaupt Braggreflexion auftreten kann).

II. Versuchsaufbau

1. Versuchsbestandteile und ihre Funktion

a) Vervollständige die Tabelle:

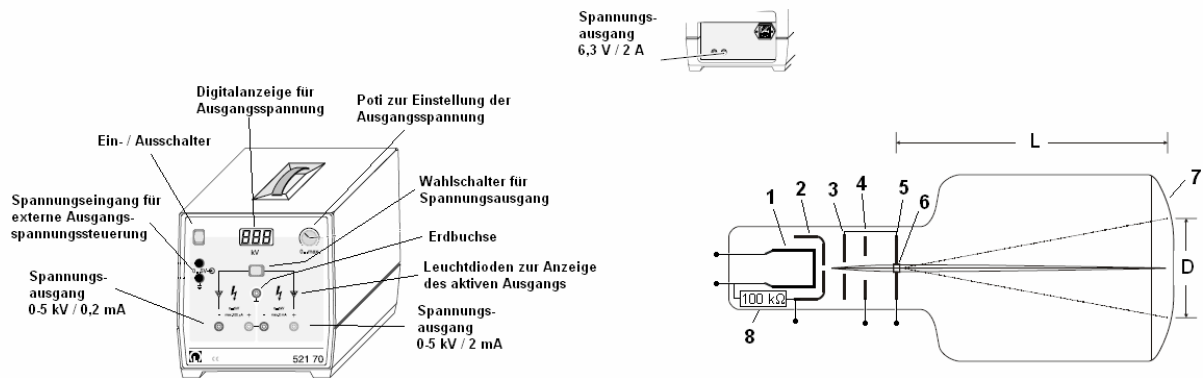
Versuchsbestandteil	Funktion
Hochspannungs-Netzgerät	
Glaskolben der Elektronenbeugungs- röhre	
	Hält Vakuum aufrecht
	Macht Elektronenverteilung hinter der Graphitprobe sichtbar
Graphitprobe	

2. Störende und nützliche Wechselwirkungen der Elektronen

- a) Warum darf der Versuch zur Elektronenbeugung nicht mit Beschleunigungsspannungen oberhalb von 5 kV betrieben werden?
- b) Warum ist der Glaskolben evakuiert? Wieviele Luftteilchen befinden sich bei einem Druck von 10^{-6} hPa (Leybold) noch in einem Kubikzentimeter Luft?
Wie wechselwirken Elektronen mit Luft? Erläutere die Mechanismen und die Abhängigkeiten.
- c) Wozu dient der Getterspiegel? Erläutere seine Funktionsweise.
- d) Was versteht man unter Fluoreszenz? Welche Materialien können für Elektronen eingesetzt werden?

3. Erzeugung von Elektronenstrahlen

- a) Aufgrund welcher Effekte lassen sich freie Elektronen erzeugen?
- b) Die Abbildung zeigt das verwendete Netzgerät und den schematischen Aufbau der Elektronenkanone in der Elektronenbeugungsröhre:
Schließe die Elektronenbeugungsröhre an das Netzgerät an.
Beschrifte die Bestandteile 1 - 8 der Elektronenkanone und erläutere ihre Funktion.



III. Versuchsdurchführung und Versuchsauswertung

1. Experimentelle Bestimmung der Netzebenenabstände von Graphit

- Auf dem Fluoreszenzschirm sind zwei Kreise zu sehen: Welche beiden Erklärungsmöglichkeiten gibt es für die Existenz eines zweiten äußeren Kreises?
- Bestimme den größtmöglichen Netzebenenabstand.
- Zeige, dass eine der Möglichkeiten aus a) ausscheidet und bestimme den zweiten Netzebenenabstand.
- Zeige experimentell, dass $p \sim 1/\lambda$ ist und bestimme die Plancksche Konstante (Hypothese von DeBroglie).

2. Unschärfe Beugungsringe

- Durch welche experimentelle Modifikation der Versuchsanordnung liese sich zeigen, dass die Unschärfe der Beugungsringe durch eine Geschwindigkeitsverteilung um einen Geschwindigkeitsmittelwert der Elektronen bei der Glühemission bedingt ist?
- Ermittle die maximale und minimale Elektronengeschwindigkeit.

3. Fehlerrechnung

- Schätze den maximalen relativen Fehler in der Netzebenenabstandsbestimmung nach III./1b ab.
- Entwickle eine Formel zur Bestimmung des Beugungswinkels, welche die Krümmung des Fluoreszenzschirms (Radius R) berücksichtigt.
- Wie groß ist der relative Fehler in der Elektronengeschwindigkeit und der Elektronenwellenlänge aufgrund der Näherung $v \ll c$?

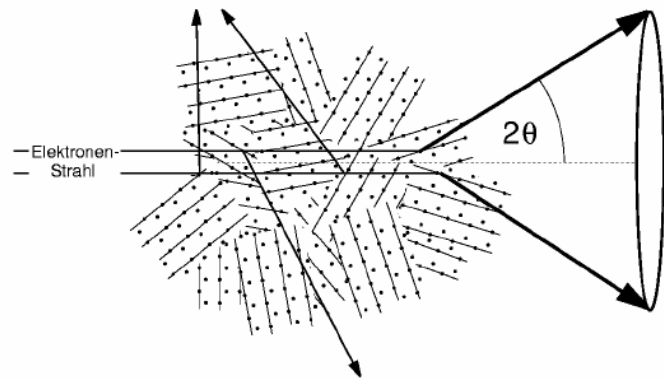
Lösungen

I. Grundwissen

1. Elektronen als Materiewellen

- a) Aus mechanistischen Vorstellungen des Elektrons als Teilchen heraus würde man erwarten, dass der Elektronenstrahl durch die Coulombwechselwirkung mit den Elektronen des Graphits lediglich aufgeweitet wird und ein zentraler Fleck um die Strahlachse herum auf dem Fluoreszenzschirm entsteht. Stattdessen beobachtet man konzentrische Kreise, die an das Beugungsmuster von Licht an einer kreisförmigen Blende erinnern. Die Entstehungsmechanismen beider Beugungsmusters sind zwar sehr unterschiedlich, aber aus einer konstanten Intensitätsverteilung über dem Strahlquerschnitt entstehen durch Wechselwirkung mit einem Objekt Intensitätsmaxima und -minima. Diese Beugung und Interferenz kann nur im Wellenmodell verstanden werden.

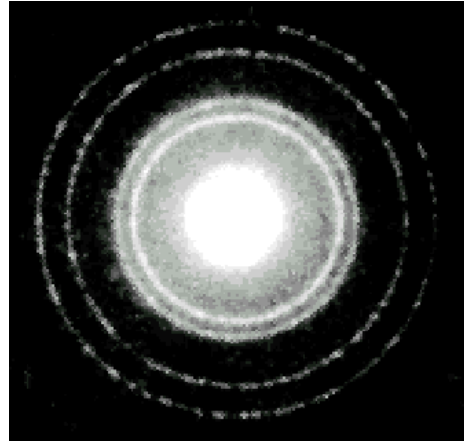
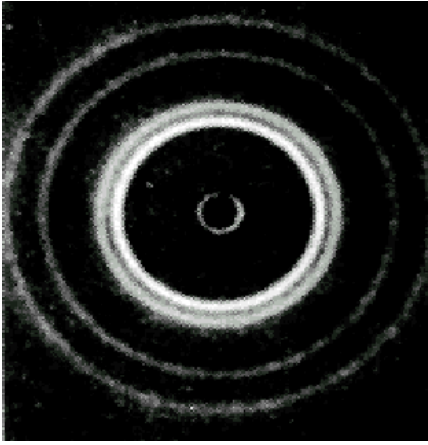
Der idealisiert betrachtete monoenergetische Elektronenstrahl mit Wellenlänge λ trifft auf die statistisch im Raum orientierten Kristallite des polykristallinen Graphitpulvers mit dem Netzenbenenabstand d . Nach der Braggschen Gleichung $2d\sin\theta = n\lambda$ erzeugen nur solche Kristallite einen Reflex bei denen der Elektronenstrahl unter dem Glanzwinkel



zu den Netzebenen auftritt (siehe Abbildung). Weitere solche Kristallite sind alle, deren Netzebenen durch Drehung um den einfallenden Elektronenstrahl hervorgehen. Die Gesamtheit dieser Kristallite erzeugt auf einem Kegel mit Öffnungswinkel 2θ liegende Reflexe. Der senkrecht zur Elektronenstrahlachse angebrachte Fluoreszenzschirm macht die kreisförmige Elektronenverteilung auf dem Kegelmantel sichtbar.

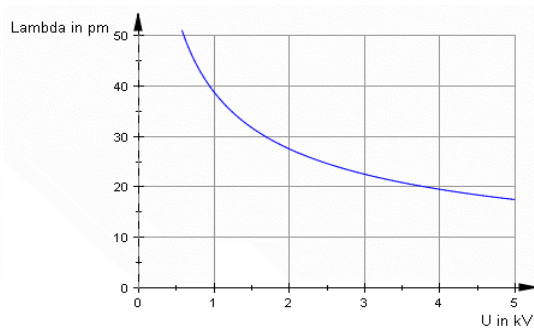
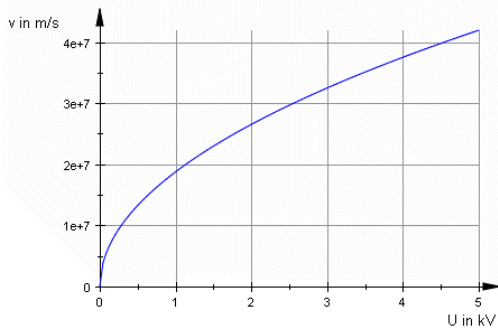
Weitere Versuche zur Bestätigung der Welleneigenschaften von Elektronen sind:

- Die Röntgenbeugung an Graphit von Röntgenstrahlen (links) gleicher Wellenlänge wie die Elektronenwellenlänge liefert das gleiche Beugungsbild wie die Beugung von Elektronenstrahlen an Graphit (rechts). Sichtbar ist jeweils die erste und zweite Beugungsordnung an den beiden Netzebenen.



- Die Beugung von Elektronen am Doppelspalt (Jönsson 1961)
 - Erster Nachweis der Welleneigenschaften von Elektronen durch Beugung von Elektronenstrahlen an einem Nickelkristall (Davisson und Germer 1927)
- b) Durch Anwendung des Energieerhaltungssatzes und der Formel für die DeBroglie-Wellenlänge erhält man:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = eU \Leftrightarrow v(U) = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \lambda(U) = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emU}}$$



Es handelt sich um nicht-relativistische Elektronen, da die Elektronengeschwindigkeit v maximal ca. $0,1c$ ist.

Die Wellenlänge reichen für eine zunehmende Beschleunigungsspannung U bis hinab in den Röntgenbereich (1000 pm - 0,1 pm).

Nach der Bragg'schen Gleichung muss für konstruktive Interferenz gelten:

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{2d} \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{2d}{n}$$

Um also mindestens die erste Ordnung für den größeren Netzebenenabstand $d = 213$ pm beobachten zu können, muss $\lambda < 426$ pm sein.

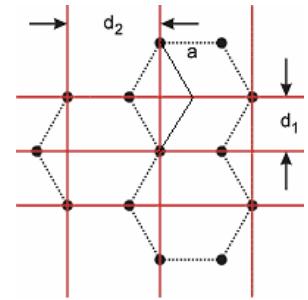
2. Gitterstruktur von Graphit

- a) Der Netzebenenabstand d_1 ist die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks im regelmäßigen Sechseck:

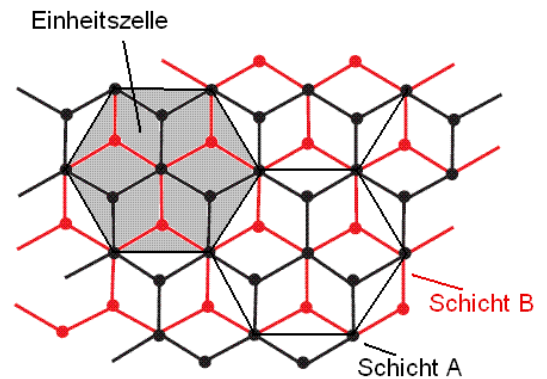
$$d_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 123 \text{ pm}$$

Für den Netzebenenabstand d_2 gilt:

$$d_2 = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a = 213 \text{ pm}$$



- b) Jede Schicht des hexagonalen Graphits besteht aus einer Packierung mit regelmäßigen Sechsecken der Kantenlänge a . Aufeinanderfolgende Schichten A und B sind so gegeneinander verschoben, dass jeweils ein Atom der unteren Schicht unter den Mitten der regelmäßigen Sechsecke der oberen Schicht zum liegen kommt. Nach der Schicht B kommt wieder die um $b = 670 \text{ pm}$ gegenüber der oberen Schicht A in die Tiefe versetzte Schicht A.



Die Einheitszelle des Graphit ist eine gerade Säule der Höhe b mit regelmäßigen Sechsecken der Kantenlänge $2d_1 = a\sqrt{3}$ als Grundflächen. Innerhalb der Einheitszelle be-

finden sich aus den beiden A-Schichten $2 \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \right) = 6$ Atome und aus der

B-Schicht $4 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 6$ Atome. Die Einheitszelle enthält also 12 Atome. Damit erhält man:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{12m(\text{C})}{6 \cdot \frac{3a^2}{4} \sqrt{3}b} = \frac{8M(\text{C})}{3\sqrt{3}a^2bN_A} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{8M(\text{C})}{3\sqrt{3}b\rho N_A}} = 142,6 \text{ pm.}$$

3. Beugung von Materiewellen an Kristallen

- a) Modellhaft wird zur Herleitung der Braggschen Gleichung die Interferenz zweier an aufeinanderfolgenden Netzebenen mit Netzebenenabstand d "reflektierten" Elektronenstrahlen betrachtet (Beobachtung in Reflexion). Für den Gangunterschied Δx zwischen diesen Elektronenstrahlen gilt:

$$\Delta x = 2d \sin \theta$$

Konstruktive Interferenz tritt ein, wenn $\Delta x = n\lambda$ ist:

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad n \in \mathbb{N}$$

- b) Es gelten folgende Beziehungen:

$$n\lambda = 2d \sin \theta \approx 2d\theta \quad \frac{r_n}{L} = \tan(2\theta) \approx 2\theta \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}$$

Einsetzen der letzten beiden Beziehungen in die erste liefert:

$$\frac{dR_n}{L} = \frac{nh}{\sqrt{2eUm}} \Leftrightarrow d = \frac{nLh}{R_n \sqrt{2eUm}}$$

c) Größeres $U \rightarrow$ kleineres λ nach $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}$, kleineres $\lambda \rightarrow$ kleineres Θ nach

$$2d \sin \theta = n\lambda \text{ für } d, n = \text{konst.}, \text{ kleineres } \theta \rightarrow \text{kleineres } r \text{ nach } \tan(2\theta) = \frac{r}{L}.$$

Nach 3b erhält man:

$$d = \frac{nLh}{r_n \sqrt{2eUm}} \Leftrightarrow r_n = \frac{nLh}{d \sqrt{2eUm}} \leq R_{\max} \Leftrightarrow n \leq \frac{R_{\max} d \sqrt{2eUm}}{Lh}$$

Für das maximale n muss mit dem größeren Netzebenenabstand $d_2 = 213 \text{ pm}$ gerechnet werden. Man erhält $n \leq 3,65$ und damit $n_{\max} = 3$.

d) Um die kleinstmögliche Spannung U_{\min} zu bestimmen, muss man nach

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}$$

die größtmögliche Elektronenwellenlänge λ_{\max} suchen. Diese bestimmt sich aus der Betrachtung der Elektronenstrahlinterferenz an den Netzebenen bzw. aus der Braggschen Gleichung

$$\Delta x = 2d \sin \theta = n\lambda.$$

Die größtmögliche Wellenlänge λ_{\max} tritt auf, wenn der Gangunterschied Δx (linke Seite der Braggschen Gleichung) für $\theta = 90^\circ$ den maximalen Wert $2d$ annimmt und in der rechten Seite $n = 1$ gewählt wird. Das erhält man auch in mehr formaler Weise:

$$2d \sin \theta = n\lambda \leq 2d \Rightarrow \lambda \leq \frac{2d}{n} \leq 2d = \lambda_{\max}$$

$$2d = \frac{h}{\sqrt{2eU_{\min}m}} \Leftrightarrow U_{\min} = \frac{h^2}{8d^2em}$$

Für $d_1 = 123 \text{ pm}$ ist $\lambda_{\max} = 246 \text{ pm}$ und $U_{\min} = 24,9 \text{ V}$. Für $d_2 = 213 \text{ pm}$ ist $\lambda_{\max} = 426 \text{ pm}$ und $U_{\min} = 8,3 \text{ V}$. Das Einsetzen des Beugungsbildes bei diesen Spannungen ist nicht beobachtbar, weil das Hochspannungsnetzgerät in diesem Spannungsbereich nicht regelbar ist und die Elektronenstrahlintensität nicht unabhängig von der Elektronenenergie regelbar ist. Die Intensität nimmt mit zunehmender Beschleunigungsspannung zu.

II. Versuchsaufbau

1. Versuchsbestandteile und ihre Funktion

a)

Versuchsbestandteil	Funktion
---------------------	----------

Hochspannungs-Netzgerät	Erzeugt die Heizspannung (Heizstrom) für die Glühkathode und die Beschleunigungsspannung U für den Kondensator der Elektronenkanone
Glaskolben der Elektronenbeugungsröhre	Wird benötigt zur Herstellung des Vakuums in der Röhre, um die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Luftmolekülen zu minimieren
Getterspiegel	Hält Vakuum aufrecht
Fluoreszenzschirm	Macht Elektronenverteilung hinter der Graphitprobe sichtbar
Graphitprobe	Dient als Beugungsobjekt geeigneter Abmessungen für die Elektronen

2. Störende und nützliche Wechselwirkungen der Elektronen

- a) Für $U = 5 \text{ kV}$ liegt das kurzwellige Ende der durch Wechselwirkung der Elektronen mit den Röhrenmaterialien hervorgerufenen Bremsstrahlung bei

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} = 248 \text{ pm}.$$

Höhere Beschleunigungsspannungen verringern λ_{\min} und erzeugen energiereichere Röntgenstrahlung. Die hierbei erzeugten Ortsdosisleistungen liegen weit unterhalb des in der [Röntgenverordnung \(RöV\), § 5 \(2\)](#) angegebenen zulässigen Grenzwertes von $1 \mu\text{S/h}$ in 10 cm Abstand unter normalen Betriebsbedingungen. Die [Elektronenbeugungsröhre von Phywe](#) kann daher auch bis maximal 12 kV betrieben werden.

- b) Durch Evakuierung des Glaskolbens finden kaum Wechselwirkungen der Elektronen mit Luftmolekülen statt. Gegenüber dem Luftdruck auf Meereshöhe von ca. 1000 hPa ist er um den Faktor 10^9 in der Röhre kleiner. Unter der Annahme eines idealen Gases erhält man mit der allgemeinen Gasgleichung bei $T = 293 \text{ K}$ ($20 \text{ }^\circ\text{C}$):

$$pV = NkT \Leftrightarrow \frac{N}{V} = \frac{p}{kT} \approx 2,5 \cdot 10^{10} \text{ Luftteilchen/cm}^3$$

Die Abbremsung von Elektronen geschieht durch Ionisation und Anregung von Hüllenelektronen der gestoßenen Atome (Coulomb-Wechselwirkung). Elektronen von ca. 5 keV haben in Luft von Normaldruck nur eine Reichweite von wenigen Zentimetern, so dass in einem Glaskolben die Luft evakuiert werden muss. Für eine konstante Absorptionsstrecke und Temperatur gilt hierbei für die Intensität der Elektronenstrahlung $I = I_0 e^{-\beta p}$.

- c) Der Getterspiegel dient dazu, verbleibende Restgase nach der Evakuierung „einzufangen“ (von to get (engl.) = fangen). Ein auf einem Metallring sich befindender Getterwerkstoff (Barium-, Aluminium- oder Magnesiumlegierung) wird durch Erhitzung verdampft. Dabei verbindet sich der Getter durch Reaktion mit den noch vor-

handenen Luft- und Gasresten und das Reaktionsprodukt schlägt sich am Röhrenkolben als spiegelnder Belag nieder.

- d) Fluoreszenz ist die spontane Emission von Licht beim Übergang eines elektronisch angeregten Systems in einen Zustand niedrigerer Energie. Der Fluoreszenzschirm ist die älteste - sehr unempfindliche - Methode zur Sichtbarmachung geladener Teilchen. Es wird z. B. Zinksulfid als Fluorid verwendet.

3. Erzeugung von Elektronenstrahlen

- a) Glühelektrischer Effekt:

Durch Erhitzen von Metallen z. B. durch Strom wird dem Elektronengas soviel thermische Energie zugeführt, dass Elektronen das Metall verlassen können. Mit steigender Temperatur des Metalls wächst die Zahl der emittierten Elektronen exponentiell, ähnlich wie der Dampfdruck einer Flüssigkeit.

Äußerer Photoelektrischer Effekt:

Energereiches Licht wie z. B. UV-Licht setzt aus Metallen und anderen Stoffen Elektronen frei.

Feldemission:

Bei der Feldemission werden durch ein ausreichend starkes elektrisches Feld Elektronen mit einer sehr geringen Energiebreite aus einer Kathode gelöst. Klassisch betrachtet ist es für ein Teilchen mit einer bestimmten mittleren thermischen Energie, die kleiner ist als die Höhe der Austrittsarbeit, unmöglich, das Kathodenmaterial zu verlassen. Quantenmechanisch betrachtet gibt es jedoch eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, dass einzelne Elektronen genügend Energie haben, um aus dem Festkörper auszutreten. Diese werden dann durch das hohe äußere Feld abgesaugt.

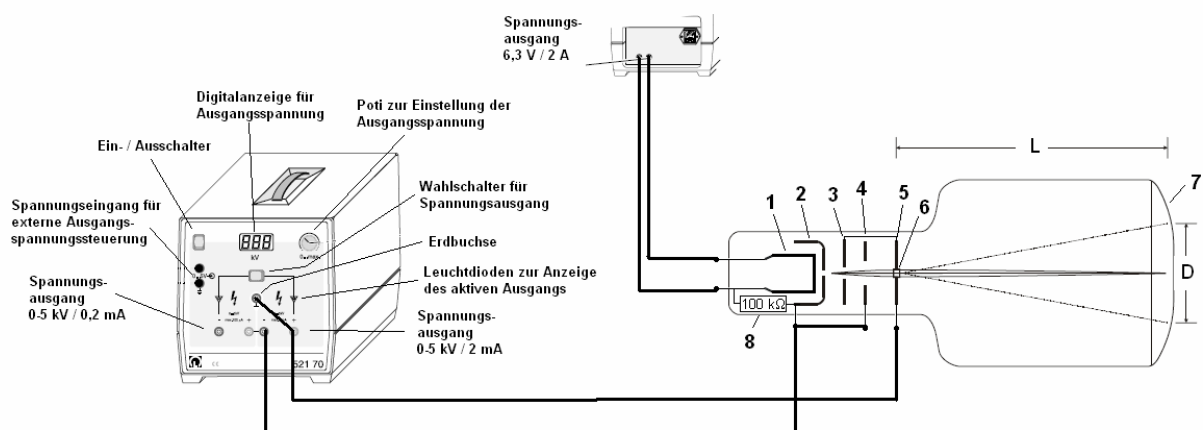
Radioaktiver β^- -Zerfall:

β^- -Strahler, setzen bei spontanen oder induzierten radioaktiven Zerfällen schnelle Elektronen frei.

Stoßionisation von Gasen:

In sehr starken elektrischen Feldern (Spitzenemission) werden neutrale Atome in Ionen und Elektronen gespalten (Glimmentladung, Lichtbogen).

- b)



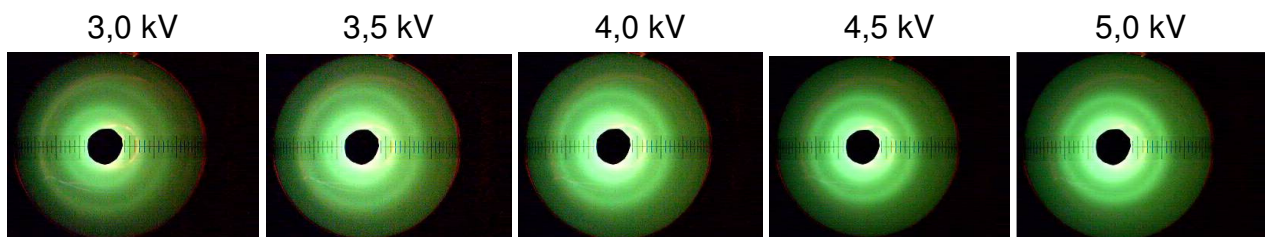
Heizfaden (1): Freisetzung der Elektronen durch Glühemission

Kathodenkappe (2): Wehneltzylinder zur Ausblendung eines Elektronenstrahls
 Anodenelektrode 1 (3): Vorbeschleunigung der Elektronen
 Fokussierelektrode (4): Fokussierung der Elektronen
 Anodenelektrode 2 (5): Beschleunigung der Elektronen
 Graphitprobe (6): Beugungsobjekt für Elektronen
 Fluoreszenzschirm (7): Sichtbarmachung der Elektronenverteilung
 100 k Ω -Widerstand (8):

III. Versuchsdurchführung und Versuchsauswertung

1. Experimentelle Bestimmung der Netzebenenabstände von Graphit

- a) Entweder man sieht zwei Beugungsringe 1. und 2. Ordnung zu einem Netzebenenabstand d oder man sieht die Beugungsringe 1. Ordnung zu einem größeren Netzebenenabstand d_2 (innerer Kreis) und einem kleineren Netzebenenabstand d_1 (äußerer Kreis).
- b) Die Bilderserie zeigt das Beugungsmuster für Spannungen zwischen 3 kV und 5 kV in 0,5 kV-Schritten:



Unter der Annahme es existieren zwei Netzebenenabstände d_1 und d_2 mit $d_2 > d_1$ und Beugungskreisen 1. Ordnung mit Durchmessern $D_2 < D_1$ erhält man folgende Messergebnisse:

U in kV	λ in pm	D_1 in cm	D_2 in cm	θ_1 in Grad	θ_2 in Grad	d_1 in pm	d_2 in pm
3,0	22,4	5,2	3,1	5,45	3,27	117,9	196,3
3,5	20,7	4,6	2,9	4,83	3,06	122,8	193,9
4,0	19,4	4,4	2,6	4,62	2,75	120,2	202,2
4,5	18,3	4,2	2,5	4,52	2,64	116,1	198,6
5,0	17,4	4,0	-	4,21	-	118,4	-

Damit erhält man als Mittelwerte $d_1 = 119$ pm und $d_2 = 198$ pm.

- c) Wäre der äußere Kreis die zweite Ordnung zum Netzebenenabstand d_2 dann müßte der Kreisdurchmesser z. B. für $U = 4$ kV 6,2 cm anstatt von 5,2 cm betragen. Dieser Wert liegt aber außerhalb der Fehlergrenzen.
- d) Der Impuls p der Elektronen kann nach $p = \sqrt{2eUm}$ aus der Beschleunigungsspannung U und die Wellenlänge λ nach der Bragg'schen Gleichung mit dem Netzebenenabstand $d_1 = 123$ pm aus dem Kreisdurchmesser D bestimmt werden. Falls $p \sim 1/\lambda$ ist $p\lambda = \text{konst.} = h$.

U in kV	D in cm	θ in Grad	λ in pm	p in $\text{Ns}/10^{-23}$	$h = p\lambda$ in $\text{Js}/10^{-34}$
3,0	5,3	5,55	23,8	2,95	7,0
3,5	4,8	5,04	21,6	3,12	6,7
4,0	4,5	4,73	20,3	3,41	6,9
4,5	4,3	4,52	19,3	3,62	6,9
5,0	4,1	4,32	18,5	3,81	7,0

Aus der letzten Spalte erhält man einen Mittelwert der Planckschen Konstante von $6,9 \cdot 10^{-34}$ Js.

2. Unscharfe Beugungsringe

- a) Man baut einen Wienfilter zwischen die Elektronenkanone und das Graphitplättchen ein, der nur noch monoenergetische Elektronen auf das Graphitplättchen treffen lässt. Dann müssten die Beugungsringe deutlich an Schärfe gewinnen.
- b) Für $U_B = 4$ kV liegt der Durchmesser D des äußeren Beugungskreises ($d = 123$ pm) zwischen $D_1 = 4,2$ cm und $D_2 = 4,8$ cm bzw. den Radien $R_1 = 2,1$ cm und $R_2 = 2,4$ cm. Die Geschwindigkeit v der Elektronen lässt sich für kleine Winkel wie folgt ermitteln:

$$\tan(2\theta) = \frac{R}{L} \approx 2\theta \quad \lambda = 2d\sin\theta \approx 2d\theta \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$\lambda = d \frac{R}{L} = \frac{h}{mv} \Leftrightarrow v = \frac{hL}{mdR}$$

Mit $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js, $L = 0,135$ m, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $d = 123 \cdot 10^{-12}$ m und den gemessenen Radien erhält man $v_{\min} = 3,3 \cdot 10^7$ m/s und $v_{\max} = 3,8 \cdot 10^7$ m/s.

3. Fehlerrechnung

- a) Nach I./3b und dem Fehlerfortpflanzungsgesetz gilt:

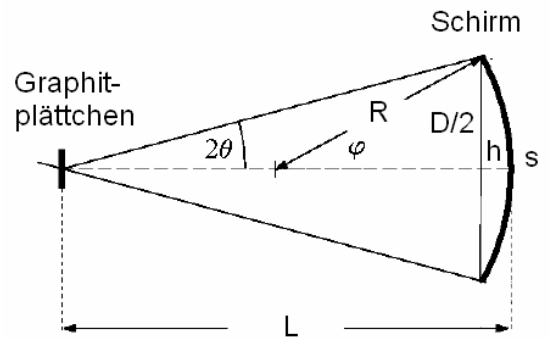
$$d = \frac{nLh}{R_n \sqrt{2eUm}} \quad \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta r_n}{r_n} + \frac{1}{2} \frac{\Delta U}{U}$$

$\Delta L/L = 0,025$ aufgrund der Fertigungstoleranzen vom Glaskolben (vgl. Gebrauchsanleitung Elektronenröhre von Phywe), $\Delta R_n/R_n = 1 \text{ mm}/20 \text{ mm} = 0,05$ und $\Delta U/U = 0,03$ (vgl. Gebrauchsanleitung Hochspannungsnetzgerät von Leybold). Der größte Fehler tritt bei der Radienbestimmung der Kreise auf. Damit ist $\Delta d/d = 0,09 \approx 10\%$.

Alternativ kann ohne Verwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ein kleinstes und größtes d für die entsprechenden Werte von L, R und U.

- b) Zur Ermittlung des Beugungswinkels kann im Experiment am besten die Strecke s gemessen und der Abstand L zwischen Graphitplättchen und Fluoreszenzschirm dem Datenblatt der Röhre entnommen werden. In der genäherten Formel für den Beugungswinkel wird die gekrümmte Strecke s durch die Strecke der Länge D ersetzt und mit $s \approx D$ sowie $h \approx 0$ gerechnet. Die genäherte Formel lautet:

$$\tan(2\theta) = \frac{D}{2L}$$



Herleitung der ungenäherten Formel unter der Annahme, dass der Schirm die Form einer Kugelkalotte hat:

$$\varphi = \frac{s}{2R} \quad \sin\varphi = \frac{D}{2R} \Leftrightarrow D = 2R \sin\varphi = 2R \sin\left(\frac{s}{2R}\right)$$

$$h = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2} = R - \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2\left(\frac{s}{2R}\right)} = R \left[1 - \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{s}{2R}\right)} \right] = R \left[1 - \cos\left(\frac{s}{2R}\right) \right]$$

$$\tan(2\theta) = \frac{D}{2(L-h)} = \frac{2R \sin\left(\frac{s}{2R}\right)}{2(L-h)} = \frac{R \sin\left(\frac{s}{2R}\right)}{L - R \left[1 - \cos\left(\frac{s}{2R}\right) \right]} = \frac{\sin\left(\frac{s}{2R}\right)}{\frac{L}{R} - 1 + \cos\left(\frac{s}{2R}\right)}$$

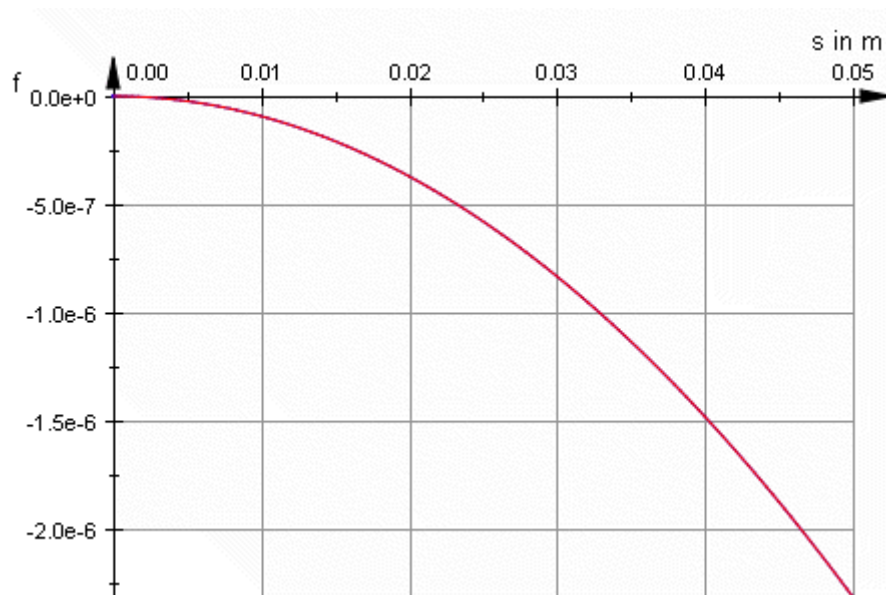
Im Vergleich dazu lautet die genäherte Formel:

$$\tan(2\theta) = \frac{R}{L} \sin\left(\frac{s}{2R}\right)$$

Für kleine Winkel mit der Näherung $\tan(2\theta) \approx 2\theta$ erhält man dann für den relativen Fehler f des Winkels:

$$f = \frac{\frac{R}{L} \sin\left(\frac{s}{2R}\right) \left[\frac{L}{R} - 1 + \cos\left(\frac{s}{2R}\right) \right]}{\sin\left(\frac{s}{2R}\right)} - 1 = \frac{R}{L} \left[\frac{L}{R} - 1 + \cos\left(\frac{s}{2R}\right) \right] - 1 = \frac{R}{L} \left[\cos\left(\frac{s}{2R}\right) - 1 \right]$$

Für die Röhre von Leybold mit $L = 13,5$ cm und $R = 5,5$ cm ergibt sich dann folgender Verlauf des relativen Winkelfehlers $f(s)$ für die genäherte (roter Graph) und die ungenäherte Berechnung (blauer Graph):



- roter und blauer Graph liegen aufeinander: Die Näherung von f für kleine Winkel ist sehr gut.
- f ist stets negativ und damit wird der Beugungswinkel zu klein bestimmt
- der Fehler f ist gegenüber dem relativen Längenmessfehler $\Delta s/s \approx 0,02$ vernachlässigbar.

c)

- Eine halb-quantitative mehr physikalische Diskussion zeigt: Nach I./1b ist $v < 0,1c$.

Damit ist nach $m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1,005m_0$, also eine Zunahme um 0,5 %. Dies

liegt unterhalb des Längenmessfehlers von 2 %.

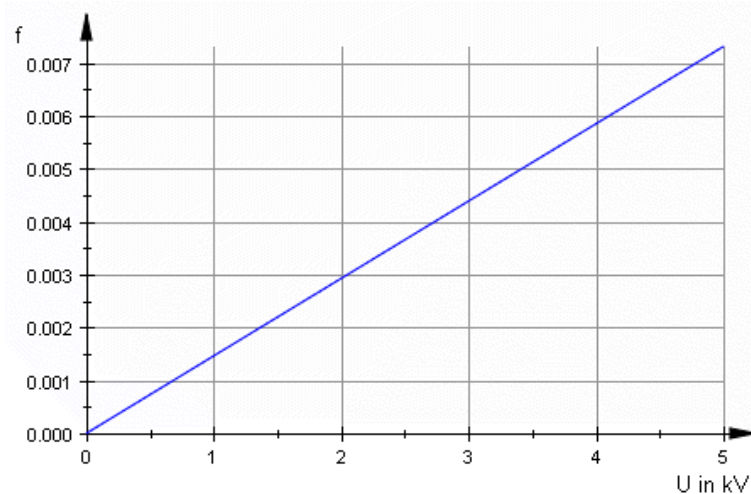
- Anwendung des Energieerhaltungssatzes im klassischen und relativistischen Fall liefert:

$$E_{\text{kin,k}} = E_{\text{pot}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2 = eU \Leftrightarrow v_k = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}},$$

$$E_{\text{kin,r}} = E_{\text{pot}} \Leftrightarrow m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) = eU \Leftrightarrow v_r = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{m_0 c^2}\right)^2}}$$

Für den relativen Fehler in der Geschwindigkeitsbestimmung erhält man dann:

$$f = \frac{v_k}{v_r} - 1 = \frac{1 + \frac{eU}{m_0 c^2}}{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m_0 c^2}}} - 1$$



Der relative Fehler in der Elektronengeschwindigkeit liegt also unter 0,7 %.

- Klassisch ist die Wellenlänge gegeben durch:

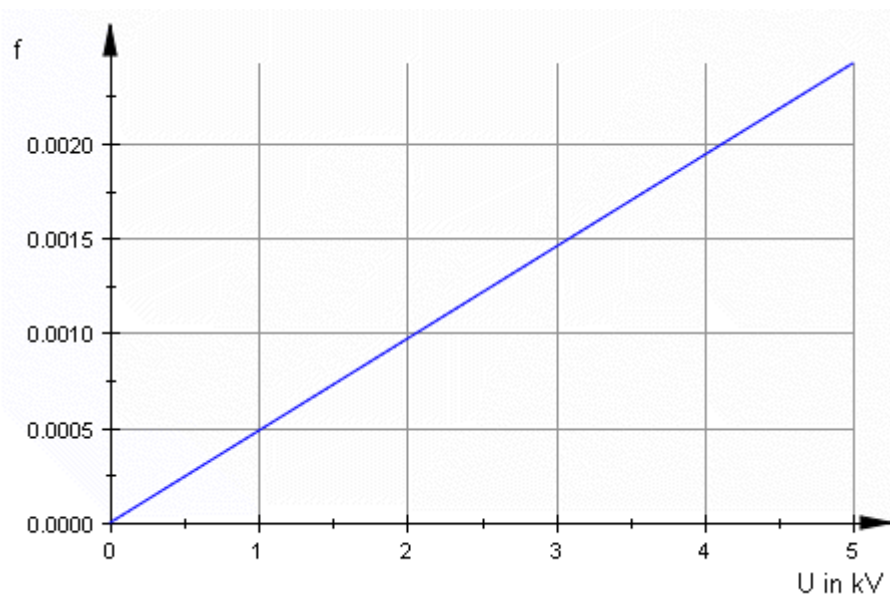
$$\lambda_k = \frac{h}{p_k} = \frac{h}{\sqrt{2eUm_0}}$$

Der relativistische Impuls $p_r = mv$ kann mit der relativistischen Masse und der relativistischen Formel für v berechnet werden. Die Wellenlänge ist dann gegeben durch:

$$\lambda_r = \frac{h}{p_r} = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{eU_A}{c}\right)^2 + 2eU_A m_0}}$$

Damit erhält man für den relativen Fehler der Elektronenwellenlänge:

$$f = \frac{\lambda_k}{\lambda_r} - 1 = \sqrt{\frac{eU}{2m_0c^2} + 1} - 1$$



Der Fehler in der Wellenlängengestimmung aufgrund der nichtrelativistischen Rechnung liegt also unterhalb von 0,2 %.